

4.5 诱导公式



情境与问题

如图 4-30 所示, $\frac{\pi}{6}$ 角分别与 $\frac{13\pi}{6}$ 、 $-\frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{7\pi}{6}$ 、 $\frac{5\pi}{6}$ 角的正弦、余弦和正切之间有什么关系?

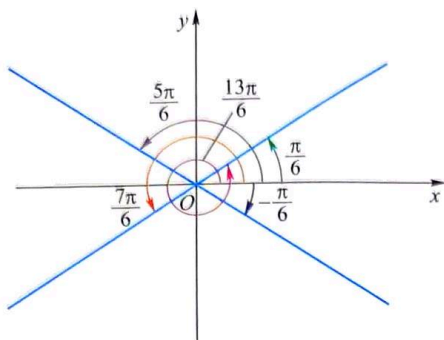


图 4-30

$\frac{\pi}{6}$ 角与 $\frac{13\pi}{6}$ 角是终边相同的角, 而终边相同的角的同名三角函数的值相等, 因此

$$\sin \frac{13\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}, \quad \cos \frac{13\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}, \quad \tan \frac{13\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{6};$$

$\frac{\pi}{6}$ 角与 $-\frac{\pi}{6}$ 角的终边关于 x 轴对称, 由三角函数的单位圆定义可得,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6}, \quad \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6};$$

$\frac{\pi}{6}$ 角与 $\frac{7\pi}{6}$ 角的终边关于原点中心对称, 由三角函数的单位圆定义可得,

$$\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6}, \quad \cos \frac{7\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}, \quad \tan \frac{7\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{6};$$

$\frac{\pi}{6}$ 角与 $\frac{5\pi}{6}$ 角的终边关于 y 轴对称, 由三角函数的单位圆定义

可得,

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}, \quad \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}, \quad \tan \frac{5\pi}{6} = -\tan \frac{\pi}{6}.$$

下面,借助单位圆的对称性,进一步研究任意角的正弦、余弦和正切之间的关系.

1. 角 $2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 与角 α 的三角函数值之间的关系

由三角函数的定义可知,终边相同的角的同名三角函数值相等.即

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi + \alpha) &= \sin \alpha, \\ \cos(2k\pi + \alpha) &= \cos \alpha, \\ \tan(2k\pi + \alpha) &= \tan \alpha.\end{aligned}\tag{4-1}$$

由公式(4-1),可以将任意角的三角函数值转化为 $[0, 2\pi)$ 内的角的三角函数值.

2. 角 $-\alpha$ 与角 α 的三角函数值之间的关系

设角 α 和角 $-\alpha$ 的终边与单位圆的交点分别是点 P 和 P' ,如图 4-31 所示,则点 P 和 P' 的坐标分别为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 与 $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$.

因为角 α 的终边与角 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称,所以点 P 和 P' 关于 x 轴对称,因此它们的横坐标相同,纵坐标互为相反数,即

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

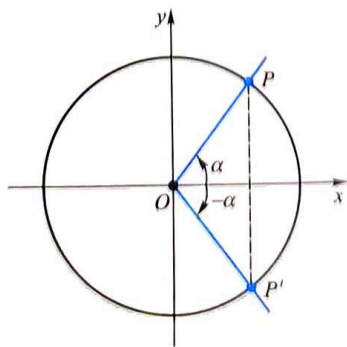


图 4-31

又由同角三角函数间的基本关系式,有

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha.$$

于是得到

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha.\end{aligned}\tag{4-2}$$

由公式(4-2)可将负角的三角函数值转化为正角的三角函数值.

3. 角 $\pi+\alpha$ 与角 α 的三角函数值之间的关系

设角 α 的终边与角 $\pi+\alpha$ 的终边与单位圆的交点分别为点 P 和 P' ,如图 4-32 所示,则点 P 和 P' 的坐标分别为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 与 $(\cos(\pi+\alpha), \sin(\pi+\alpha))$.

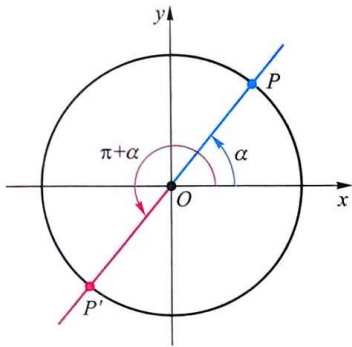


图 4-32

因为角 α 的终边与角 $\pi+\alpha$ 的终边关于原点 O 中心对称,所以点 P 和 P' 关于原点 O 中心对称,因此,它们的横坐标互为相反数,纵坐标也互为相反数,即

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos \alpha, \sin(\pi+\alpha) = -\sin \alpha.$$

又由同角三角函数间的关系式,有

$$\tan(\pi+\alpha) = \frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

于是得到

$$\begin{aligned}\sin(\pi+\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(\pi+\alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(\pi+\alpha) &= \tan \alpha.\end{aligned}\tag{4-3}$$

由公式(4-3)可将角 $\pi+\alpha$ 的三角函数值转化为角 α 的三角函数值.

4. 角 $\pi-\alpha$ 与角 α 的三角函数值之间的关系

利用公式(4-2)和公式(4-3)可以得到:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin[\pi+(-\alpha)] = -\sin(-\alpha) = -(-\sin \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(\pi-\alpha) = \cos[\pi+(-\alpha)] = -\cos(-\alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(\pi-\alpha) = \tan[\pi+(-\alpha)] = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

即

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos \alpha, \quad (4-4)$$

$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan \alpha.$$

由公式(4-4)可将角 $\pi-\alpha$ 的三角函数值转化为角 α 的三角函数值.

公式(4-1)~公式(4-4)都是三角函数的诱导公式,利用这些公式,可以将任意角的三角函数转化为锐角三角函数进行计算.

试一试



利用角 α 的终边与角 $\pi-\alpha$ 的终边关于 y 轴对称,推得公式(4-4).



典型例题

例1 求下列三角函数值.

$$(1) \sin 780^\circ; \quad (2) \cos \frac{9\pi}{4}; \quad (3) \tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right).$$

解 (1) $\sin 780^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$(2) \cos \frac{9\pi}{4} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(3) \tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例2 求下列三角函数值.

$$(1) \sin(-60^\circ); \quad (2) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$(3) \tan(-30^\circ); \quad (4) \tan \frac{11\pi}{6}.$$

解 (1) $\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

$$(2) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(3) \tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$(4) \tan \frac{11\pi}{6} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 3 求下列三角函数值.

$$(1) \sin \frac{7\pi}{6}; \quad (2) \cos(-240^\circ);$$

$$(3) \tan 210^\circ; \quad (4) \cos \frac{13\pi}{4}.$$

解 (1) $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$

$$(2) \cos(-240^\circ) = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$(3) \tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$(4) \cos \frac{13\pi}{4} = \cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 4 求下列三角函数值.

$$(1) \sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right); \quad (2) \tan 495^\circ; \quad (3) \cos \frac{5\pi}{6}.$$

解 (1) $\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = -\sin \frac{9\pi}{2} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1;$

$$(2) \tan 495^\circ = \tan(360^\circ + 135^\circ) = \tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1;$$

$$(3) \cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 5 化简 $\frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha) \tan(3\pi - \alpha)}.$

解
$$\frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha) \tan(3\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{(-\cos \alpha)(-\tan \alpha)} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = -1.$$



探究与发现

把任意角的三角函数转化为锐角三角函数的一般步骤是什么？可以结合 -750° 、 225° 、 510° 举例说明.

在实际问题中,经常利用科学型计算器求任意角的三角函数值.

用科学型计算器计算任意角的三角函数值的主要步骤:

设置模式(角度制或弧度制)→按键 $\boxed{\sin}$ (或按键 $\boxed{\cos}$ 、 $\boxed{\tan}$)→输入角的大小→按键 $\boxed{=}$ 显示结果.



典型例题

例 6 利用科学型计算器,求下列各三角函数值(保留到小数点后第 3 位).

$$(1) \sin \frac{2\pi}{7}; \quad (2) \tan 47.6^\circ.$$

解 (1) 将科学型计算器设置为弧度制模式:

$$\boxed{\text{SHIFT}} \rightarrow \boxed{\text{MODE SETUP}} \rightarrow \boxed{4}$$

输入函数名,输入角,得到计算结果:

$$\boxed{\sin} \rightarrow \boxed{(} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{\text{SHIFT}} \rightarrow \boxed{\times 10^x} \rightarrow \boxed{\div} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{)} \rightarrow \boxed{=}, \text{显示结果}$$

0.7818314825. 因此,

$$\sin \frac{2\pi}{7} \approx 0.782.$$

(2) 将科学型计算器设置为角度制模式:

$$\boxed{\text{SHIFT}} \rightarrow \boxed{\text{MODE SETUP}} \rightarrow \boxed{3}$$

输入函数名,输入角,计算结果:

$$\boxed{\tan} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{\cdot} \rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{=}, \text{显示结果 } 1.095139739. \text{ 因此,}$$

$$\tan 47.6^\circ \approx 1.095.$$